平行と合同

証明の形式（その４）

《教材紹介コーナー》へ

▶平成21年2月8日(日)

このテーマでは，４回目の授業です。

★

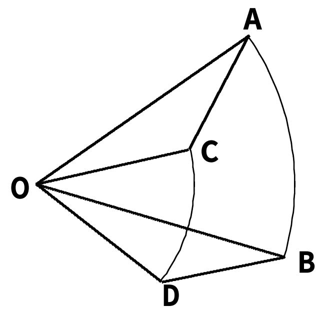
生徒Ａ：「センセ，
乾燥麺とか乾燥ごはんってあるでしょ。」
先生：「うん，あるある，
よく，食っとるよ。」
生徒Ａ：「乾燥いもとか乾燥かぼちゃなんてもあるよね。」
先生：「そうそう，
野菜も乾燥してしまうな。」
生徒Ａ：「で，ね！
乾燥トマトなんてのもあるんよ。」
先生：「ほ～っ！
どんなの？」
生徒Ａ：「よく，ふとんをビニールの袋に入れ，
中を真空にして小さくして押入にいれておくことあるでしょ？」
先生：「うん，あるある。
うちでもよく使っておるが。」
生徒Ａ：「トマトをね，
ビニール袋の中に入れて，
空気をぬくの。
ふとんみたいに，ぺちゃ～っとつぶれとる！」
先生：「ほ～っ！
それで，どうやって食べるの…？
水かなにかで戻すの？」
生徒Ａ：「いや，そんなめんどくさいことせんでもいいの，
ビニールを破ると，空気が入ってもとにもどる。」
先生：「へ～！
それはすごい！
独身の先生には最高だな，
買いだめができるがね。
ねえ，ねえ！
そんなのどこへ行けば買えるの？」
生徒Ａ：「…！？
センセ，
そんなトマト，あると思ってるの？」
先生：「あるんでしょ？」
生徒Ａ：「あるわけないでしょ！

ばっか！」
先生：「…＃＄％＆！
この～！」

★

きょうもこの先生，生徒に遊ばれて授業をスタートします。

図のように，０を中心とする２つのおうぎ形ＯＡＢ，ＯＣＤがある。
中心角∠ＡＯＢ，∠ＣＯＤが等しいならば，
ＡＣ＝ＢＤである。
これを証明しなさい。



先生，虎視眈々と生徒Ａへの復讐の機会をうかがっております。
生徒Ａも身構えて警戒しております。
さて，授業は緊張したまま進みます…。

★

先生：「この問題をやれる人いますか？」
いつもは我先に手をあげる生徒Ａ，
きょうは手をあげません，
身構えております。

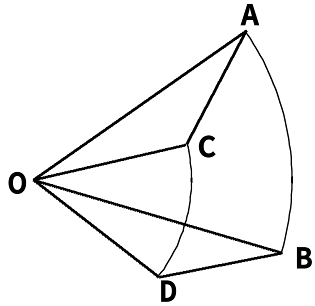
生徒Ａ子：「ほい，あたし，やる！」
生徒Ａの妹ではありません。
まったくの他人ですが，
性格は生徒Ａととてもよく似ていて
うすらば…
おっと，これは差別用語で使ってはいけない！
少し賢くはありません…。
はい…！

生徒Ａ子：「中心角∠ＡＯＢ，∠ＣＯＤが等しいんね，
おうぎ形？
センセ，三角形はないの？」
先生：「…
ちゃんとあるでしょ！」
生徒Ａ子：「中心角∠ＡＯＢ，∠ＣＯＤを含む三角形などないよ。

センセ，教えてくれたでしょ。
　角が等しいのを証明するには，証明する角を含む三角形をさがせって！」
先生：「…
∠ＡＯＢ＝∠ＣＯＤを証明することが問題ではないでしょ？」
頭の隅に残っているものなら何でも動員します！
生徒Ａ子：「でも，”～ならば”だから仮定でしょ？
”仮定はありがたいから迷わず使わせてもらいましょう”
っていつもセンセ，言っているでしょ？
どこかで使いたいけど，どこで使うの？」
なんか，先生とＡ子の論理がかみあいません。
Ａ子自身の論理も一貫性がありません。
Ａ子何を言っているのか自分ではわかってはおりませんな！
笑ってはいけません。
この問題を解くときには，
生徒の頭の中では，このような葛藤が行われているのです。
先生：「…！
だめだ，こりゃ！」

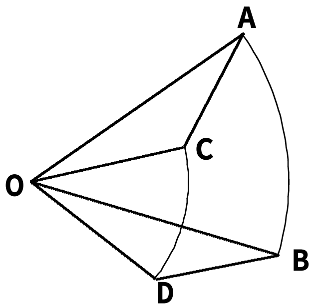
★

…と，突然
生徒Ａ：「ＡＣ＝ＢＤを証明するんだから，
ＡＣ，ＢＤをそれぞれ辺とする２つの三角形は△ＡＯＣと△ＢＯＤ
じゃないか，これらの三角形の合同を証明すればいいんだよ。
先生：「ほ～っ！
やってみっか？」



生徒Ａ：「お～し！
△ＡＯＣと△ＢＯＤで
仮定より，∠ＡＯＢ＝∠ＣＯＤ　…①
ＡＯ＝ＢＯ　…②
ＣＯ＝ＤＯ　…③
①，②，③から，２辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△ＡＯＣ≡△ＢＯＤ
合同な三角形では対応する辺の長さは等しいから
ＡＣ＝ＢＤ」
先生：「②，③の理由が書いてないでしょ！」
生徒Ａ：「…！
でも，等しい。」
先生：「どして？」
生徒Ａ：「等しいっぽい！」
先生：「ぽい？

証明では”ぽい”は，ダ・メ！」
生徒Ａ：「どして，等しいの？」
先生：「そもそも！」
生徒Ａ：「はい！」
先生：「合いの手は入れなくていいの！」
生徒Ａ：「ほい！」
先生：「だからさぁ，
まあ，いい…。
で，”Ｏを中心とする２つのおうぎ形ＯＡＢ，ＯＣＤ”
と問題に書いてあるでしょ！
これが仮定。
つまり，おうぎ形の半径であるから，
ＡＯ＝ＢＯ
ＣＯ＝ＤＯ
となるわけだ。」



生徒Ａ：「ほ～！
センセ，頭いいね！」
先生：「この～っ！
はたくど！
そんなこと，どうでもよろし！
それよりも，
”仮定より，∠ＡＯＢ＝∠ＣＯＤ　…①”
は，”犯罪的まちがい”だな。
こんなのどっから盗んできた？」
生徒Ａ：「問題に書いてある。
だから，仮定！」
先生：「でも，証明すべき三角形の△ＡＯＣと△ＢＯＤの角ではないでしょ！
よそから盗んできて，この三角形の中に入れてはいけない！
さっき，Ａ子がやった同じまちがいでしょ。
何を聞いていたの，
ばっか！」
生徒Ａ，とうとう復讐されてしまいました。
生徒Ａ：「ほへ！
そうですよ，盗みはいけませんよ！
いいですか，Ａ子さん！」
生徒Ａ子：「ぼけっ！…？」
生徒Ａ，Ａ子に八つ当たりをしてますが，Ａ子は何のことかわかっていません。
実に，不思議なクラスです。

しかし，よそから盗んでくるとうまくいく問題というのもあります。

相似です。よその相似から辺の比を盗んできて，こっそりその比を利用して辺の長さを求める比例式を作る問題というのがあります。
これは実に楽しい学習です。３年で学習します。

★

さて，この問題も最大の山場にかかります。
合同条件で，「その間の角がそれぞれ等しい」という場合のその角がどこか，という問題です。そして，なぜ等しいかという理由を説明する問題です。
ここでは，まったく新しい考え方を覚えなければなりません。

そもそも，合同条件というのは，恣意的に条件を探し回るのではなく，計算プロセス同様，探索手順というのがあります。
この手順にしたがって合同条件を調べてはじめて，理路整然とした証明が可能となります。
これが，生徒が一番ほしがっている「証明の一般的手順」のことです。

「証明の一般的手順」の概要を紹介します。
【合同条件探索のヒューリスティックス】

(1) 仮定をひろう。
(2) 共通をひろう。
　　辺の共有，角の共有など
(3) 図形の性質をひろう。
　　平行線，対頂角，角の性質等々
(4) 辺や角度を計算し，同じ式で表す

これは，必ず(1) →(2) →(3) →(4) の順に合同条件をさがしていかなければなりません。
詳細は，次の資料をご覧下さい。　→りんく「証明の手順」

この問題では，上の「証明のヒューリスティックス」の(4)を使うことによって証明する問題というわけです。
話が佳境に入りかけたところで，きょうの授業はおしまい。
続きは，次回へ。

さて，次回はこの角度を計算し，同じ式で表すことで合同条件を示す方法を学習します。
合同の証明方法の最後の”手”，”裏技”，”秘法”の紹介です。
教材は，前もって紹介しておきます。⬇

《最初のページ》へ