２次関数 「変化の割合」とその利用

《教材紹介コーナー》へ

▶平成21年1月15日(木)

怖いお話のつづき…
本通りをひとつ入ったおしゃれなブティックが軒を連ねる裏通り…
この世のものとはおもえぬかぐわしき香りがあたり一面にただよう…
おお！
これ，シャネルってんだよ。
純白のワンピースで決めているお嬢様が醸し出すシャンゼリゼの世界！
腰まで伸びた黒髪が薫風にさらり…
引き締まった腰，すらりと伸びた脚…
おお！
女優さんかね。
深紅のメタリックなハイヒールが太陽の光をはじきながら
コツコツコツ，と石畳のビブラフォンで軽快なシャンソンをかなでる。
きょうは朝からいいものを見せていただいております。
「ねぇ，そこのおじょうさ…！？」＼(*_*)／
「ぶは～っ！」
いやなものを見てしまった！
「なんじゃい！」
図太いバリトンのパンチ！
シャンソンがアートブレーキーのドラムソロに変わります！
ワンピースをたくしあげた「がに股」が追ってくる！
つかまらないように逃げます。
落差が大きいほど恐怖もおおきい！
世の中に，こんな「きもちわるい」ものがあっていいのか…，諸君！
食欲がなくなったので
きょうの昼飯は「すうどん」ですまそ…！
巷間よく見る恐怖の風景からでした。
ジャンジャン！

★

きもちわるいことは，すぐに忘れましょ。
きょうは，「変化の割合」と「ｙの増加量」の混同についてのお話です。
「変化の割合」も，生徒にとっては，
わりあいと得体の知れない「きもちわるい」もののようです…(^_^;)！

　１次関数　ｙ＝６χ－３　…①と関数　ｙ＝ａχ^2　…②について，χが１から３まで増加するとき，次の問いに答えなさい。
(1)　関数②のｙの増加量が関数①の変化の割合に等しいとき，ａの値を求めなさい。
(2)　関数②の変化の割合が，関数①の変化の割合に等しいとき，ａの値を求めなさい。

↑黒板を作ってみました。(*^_^*)！

生徒Ａ：「よっしゃ，(1)　行く！

$$\frac{a\times 3^2 - a\times 1^2}{3-1}=6$$

両辺に２をかけて，左辺を計算すると　８ａ＝１２，ａ＝$\frac{3}{2}$」

先生：「…！

じゃあ，(2)　はどうなるの？」

生徒Ａ：「…？

(2)　は…

$$\frac{a\times 3^2 - a\times 1^2}{3-1}=6$$

両辺に２をかけて，左辺を計算すると　８ａ＝１２，ａ＝$\frac{3}{2}$」

先生：「(1)　と(2)　はどこが違うの？」

生徒Ａ：「同じになった！」

じゃんじゃん！

このような間違いをする生徒はけっこう出ます。
結局，「ｙの増加量」と「変化の割合」の違いがわかっていないのですね。
というよりも，そもそも「ｙの増加量」と「変化の割合」の２種類の量があることなどはなから想定していないのです。
変化の割合もどきの問題はすべて「変化の割合を求める公式」を使うと思いこんでいるのです。
しかも，この公式は何を求めるものなのか，についてはあまり意識してはいません。
「変化の割合」の公式を丸暗記しただけの知識しかもっていないことが原因なんですね。

★

「変化の割合」は，概念としてきちんを形成してあげなければなりません。
それでは，生徒に「変化の割合」の概念を形成するには，どのように指導をすればいいのか…

(1) まず，「χの増加量」，「yの増加量」という概念を形成します。
そのために…
まず，「χの増加量」を求める式を書かせます。
増加量の求め方は，「終値－始値」であることを徹底します。
あるいはχの値の場合は，「大きい値－小さい値」で増加量が計算できるのですが，公式に代入するときに，逆にする生徒がけっこう出ます。
次に，χの変域の両端における「yの値を求める式」を書かせます。
「χの値に対応するyの値」という考え方を意識化するためです。
この２つの数値を使って「yの増加量」を求める式を書かせます。
yの増加量の計算方法も，「終値－始値」であることをさらに徹底しなければなりません。生徒は，恣意的に増加量を計算してしまいます。
つまり，どちらからどちらを引くのかの判断が気分的なのです。
（＊差が正の数になるようにひき算をする場合が多いように思えます。）
増加量の正，負が，比例定数の正負やχの変域に応じて変わるために，
計算結果からはその正誤が一義的に判別できません。
だから，「終値－始値」を徹底しないと，立式し，計算してからでは，間違っていることが分かりません。
実際には，yの増加量は
「χの値の終値に対応するyの値－χの値の始値に対応するyの値」
として求めるわけですが，この考え方を徹底することで間違いを防ぐことが可能になります。ここでも，対応という考え方が重要になります。

(2) 次に，「変化の割合」の概念を形成します。
そのために…
求めたχの増加量とyの増加量を使って，「χが１増加したときのyの増加量」を求める式を作らせます。
これは，「１当たりの量を求める」計算で，
「６個のみかんを３人で分けたときの１人分のみかんの個数を求める」思考方法と全く同じです。
これが「変化の割合」であると定義します。
yの増加量の特殊形態が変化の割合であると認識させることになります。
これは，距離と速さの関係と同じで，一般・特殊の弁証法的関係です。
＊このように考え方のプロセスを構造的に書き出させることによって，「思考プロセス」を視覚化し，生徒に構造的に内化（記憶）させます。

(3) 最後に，公式を導きます。
導入段階では，これでいいのですが，いつまでもこんなことをしていると知識が圧縮されず，易動的にはなりません。
数ステップの思考プロセスは，それに習熟した段階では圧縮された形式で瞬時に処理さなければなりません。
それは，訓練によって圧縮されるのではなく，圧縮された思考形式を習得することによってのみなされます。
また，それは生徒の自然な練習によって習得されるのではなく，教授によっ

て生徒の思考に持ち込まれるものです。
この圧縮された思考プロセスが「公式」といわれるものです。
変化の割合では，次の公式が圧縮された思考プロセスになります。

$y = a\chi^2$ で，$t \leqq \chi \leqq t + h$ のとき

$$\text{変化の割合} = \frac{y\text{の増加量}}{\chi\text{の増加量}} = \frac{a(t+h)^2 - at^2}{(t+h) - t}$$

ここでは，２つの前学習のステップによって，公式を構成する個々の要素が何を求める式なのか，については十分理解されていることになります。
また，χの値とｙの値が構造的に対応した形で見えるため，どちらからどちらを引くのかについては，χ，ｙともに迷うことはありません。

最終的に生徒に形成される思考形式は外面的には同じものです。
しかし，それが丸暗記で形成されたのか，あるいは概念として形成されたのかによって，形成された知識の質はあきらかに異なります。
これは，たとえば，「ｙの増加量と変化の割合をきちんと区別して処理することができるかどうか」の違いとして現象します。
いきなりできあいの形でこの圧縮した公式を与えると，生徒は丸暗記してしまいます。
畢竟…

★

生徒Ｂ：「(2)はすぐ出せるよ！
$a \times (1+3) = 6$
これを解いて，$a = \frac{3}{2}$。」
生徒Ａ：「…？
$a \times (1+3)$ って何のこと？」
生徒Ｂ：「変化の割合を求めたの。」
生徒Ａ：「何をしたの？」
生徒Ｂ：「関数の比例定数にχの変域の両端の座標の和をかけた！」
生徒Ａ：「それがどうして変化の割合なの？」
生徒Ｂ：「さ～あ？
塾で，そうすると求めることができるって教わったの。」
ジャンジャン！

★

これ以上悪い教え方はない，という典型です。
学生がよく教える「裏技」です。
確かにこの考え方を使うと瞬間的に変化の割合は出せます。
問題は，この式には変化の割合についての本質がどこにも内包されていないということです。
だから，速さにおける「はじき」と同様に，知識が貧弱になり，不安定になりま

す。応用はきかないし，忘れやすいということです。

★

「忘れやすい知識」ということに関してひとこと…
「意味のない知識」は「意味づけられた知識」と比べるとはるかに忘れやすいものです。わかりやすい例で説明しましょう。

例えば，円周率は数値の意味づけて２０けたほどは覚えることができますが，無意味な数値の羅列は決して覚えることはできません。
ためしに，円周率を下のように意味づけて覚えてみてください。
２２けたほどは正確に覚えることができます。

産医師，	異国に向かい，	産後は苦なく	産婦さんは	喜び
３．１４	１５９２６５	３５８９７９	３２３８	４６２…

意味づけも，こじつけではなく，テーマのあるストーリーになっているから覚えやすいのですね。

また，歴史の年号を覚えるのによく意味づけが使われますが…
例えば，
「７９４年」については
鳴くよウグイス平安遷都…①
泣くよ坊さん平安遷都…②
の２種類の覚え方があります。（まだあるのかもしれませんが…）
①では，その歴史的背景は現れてはいません。
ところが，②では道鏡を中心とした僧侶の堕落を一掃するために，都を平安京へ移したので僧侶（＝坊さん）は泣かなければならなかった，という歴史的背景を含んで意味づけがなされています。
どちらがすぐれた覚え方であるかは歴然としています。

例え，数字に意味をつけるとしても，こじつけではいけないということです。
意味づけが対象に対して必然的な意味をもっていなければならないのです。
円周率の意味づけについても，お産の話で統一したストーリとなっているので覚えやすいのです。

ちなみに，同じ２２けたの数字です。意味のない数字の羅列です。
２５７８９６４３８０１２４８９３７２２４５８
覚えてみて下さい。
ぜったいに覚えることなどできません。

★

「変化の割合」の指導プロセスを書いてみました。

しかし，こうした指導理論は，理論としてある間は何の役にもたちません。
「ほ～！，な～るほど。」でおしまいです。
たとえそれがどれだけ優れた理論であっても，使うことはできません。
理論を現実化するためのツールが用意されていない理論は空論です。
その通りに生徒といっしょに学習を進めていくならば，自動的に生徒に一定の質をもった知識や技術が習得される具体的な教授－学習プログラムが必要なのです。これが「教材」です。もちろん，問題集ではありません。問題を解く思考プロセスが設計されていて，プログラム形式で書かれている教材のことです。

一方，「指導案」というのがあります。
しかし，生徒にある概念を形成するに際して，「指導案」など，まったく役に立たないというのはどの先生も実感されているでしょ？
実際の授業では，「指導案」など見ている暇はないからです…(*^_^*)！
でも研究授業では必ず「指導案」を書きますが，あれって何のためでしょ？
単なる「いいわけ」のような気がします。
つまり，「考えて，準備して」授業しましたよ，といういいわけです。

★

数専ゼミでは，すべての授業が「教材」という形でプログラミングされたプロセスにそって実施されます。
思いつきを付け加えることも，１部を省略することも許されません。
教師の恣意的な指導趣味を排除するためと，生徒に一貫した思考を保証するためです。
問題解決への多様なアプローチは当然勘案されねばなりません。
しかし，それは，授業の中での教師の個人的な思いつきとしてではなく，それが教材の流れあるいは思考方法として十分に吟味・検討され，教材として組み込まれてはじめて，生徒に与えられなければなりません。
問題解決のアプローチの多様性の指導方法はこれまでブログでいくつか紹介しております。（矢形の問題など：「平行と合同」№８，）

★

「変化の割合」に関する数専ゼミの教材の流れを紹介しましょう。
２次関数　№１０（１／７）～（７／７）
・「χの増加量」「ｙの増加量」の概念の形成
・「変化の割合」の概念の形成
２次関数　№１１（１／５）～（５／５）
・「変化の割合」を求める思考プロセスを圧縮します。
「公式」の導入です。

＊なお，先に生徒Ｂが用いた変化の割合の求め方についても，なぜそのように計算していいのかを証明させながら習得させる教材も用意してあります。
生徒Ｂのように教わって，意味もわからずこの知識を振り回す生徒が多いからです。（学校の先生に教わったという生徒もいます。もちろん，なぜこの公式が言

えるのかについては指導していると思うのですが，生徒は全く理解してないのが現実です。）
教材№は№１０の発展（１／３）～（３／３）です。

２次関数　■変化の割合■に関する教材群

■　№１０　変化の割合とその求め方
■№１０ｓ（発展）　変化の割合とその求め方（速算）
＊実際の授業では，№１１の学習の後で学習させます。
■　№１１　変化の割合の利用（変化の割合の公式）

■◀●■【　まちがいをさせない教材　】■●▶
インターネットを使った通信教育用教材（生徒の自学自習用教材）の紹介です

２次関数 №１３	３　関数　ｙ＝ａχ²の値の変化（その２） ■　変化の割合の利用③　■	クリック

《最初のページ》へ