１次関数　動点と面積の問題

《教材紹介コーナー》へ

▶平成20年11月27日(木)

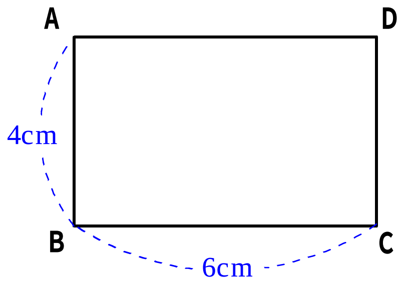
－第３回目－

先生：「春過ぎて　夏来にけらし　白妙の…」
生徒Ａ：「…あるじなしとて　春な　忘れそ。」
生徒達：「…ん？」(?_?)！
先生：「…ん？
　　　では…！
　　　東風吹かば　にほひおこせよ　梅の花…」
生徒Ａ：「…うぐ！」
生徒Ａ，続きがでません。
でないわな！
もう出してしまったんだから！
じゃんじゃん！
きょうは，小倉百人一首（持統天皇）と菅原道真から入りました。
動点問題を続けます。
きょうは，ＣＤ間から行きます。

右のような長方形があります。点Ｐが毎秒２㎝の速さで点Ｂを出発して辺上をＣ，Ｄ，Ａまで動きます。点Ｂを出発してχ秒後の△ＡＢＰの面積をｙ㎝²とするとき，次の問いに答えなさい。

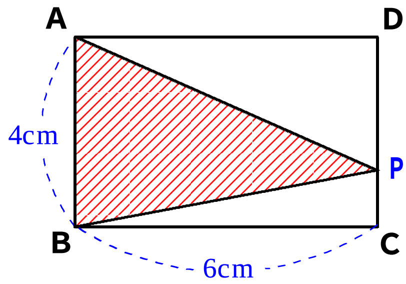
(1)　χとｙの関係をグラフで示しなさい。

(2)　△ＡＢＰの面積が６㎝²となるのは，点Ｂを出発してから何秒後ですか。



先生：「さて，点Ｐは頂点Ｃを出ます。
　　　点Ｐが辺ＣＤ上の任意の位置にいるとして，
　　　そのときの△ＡＢＰの面積ｙをχの式で表してみましょう。」
生徒Ａ：「任意って？」
先生：「どこでもいい，という意味！」
生徒Ａ：「どこでも？」
先生：「…」
生徒Ｂ：「ｙ＝１２です。」
生徒Ａ：「ほよ！
　　　　でも，χがないねェ！
　　　　なくてもいいの？」

生徒Ｂ：「計算したら，なくなった！」
生徒Ａ：「どんな計算したの？」
生徒Ｂ：「△ＡＢＰ＝台形ＰＡＢＣ－△ＰＢＣ
　　ＢＰＣ＝χ，ＢＣ＝６よりＰＣ＝χ－６
　　これを使って，ｙ＝（χ－６＋４）×６÷２－６×（χ－６）÷２
　　　　　　　　　　　　　台形ＰＡＢＣ－△ＰＢＣ
　　　　　　　　　ｙ＝（χ－２）×３－３×（χ－６）
　　　　　　　　　ｙ＝３χ－６－３χ＋１８
　　　　　　　　　ｙ＝１２
　　χが消えた！」
生徒Ａ：「χの１次関数なのに，χなくていいの？」
生徒Ｂ：「…？
　　　ないものは，ない！」
生徒Ｃ：「でも，めんどっちいね！
　　　点ＰがＣＤ上にいるときは，いつでも
　　　底辺が４㎝で，高さが６㎝だから，
　　　面積は，いつでも４×６÷２＝１２だよ。
　　　つまり，ｙ＝１２。」



生徒Ａ：「な～るほど！
　　　こっちのほうがめちゃんこ易しい。」
生徒Ｂ：「でも，それだと一般性がないがね。
　　　点ＰがＡＤ上にいるときには，使えないじゃないか。」
生徒Ａ：「そのときは，そのときじゃないの！
　　　でも，Ｂ君の式だけど，
　　　どしてχなの？
　　　点Ｐの速さは２㎝／秒でしょ！
　　　χ秒後には２χ㎝進むと思うけど…」
生徒Ａ，ちゃんと捲土重来してます。
点ＰがＢＣ上にいたときの自分の答案の蹉跌を教訓として
よ～く見ています。

★

ところで，「蹉跌」…
これも難しい言葉です。
「青春の蹉跌」ですね。石川達三です。
え？
知らない？
それは，それは…
芥川賞を最初に受賞した作家です。（1935年に『蒼氓』で）
蹉は，つくりの方が音を表しているから「サ」と読めるのですが…
跌はどこにも音がないので読めません。
使い方も難しいです。

広辞苑では，①つまづくこと。，②失敗すること。
「入学試験の蹉跌」…
どこか，違和感のある表現です。
「路傍の石に蹉跌する」
とは，絶対言わない。
どんな場合に使うのでしょうかね。
「青春の蹉跌」があれば「老年の蹉跌」もありそうですが…
でも，「７０にして心の欲する所に従ひて，矩をこえず」はずの老人には
不似合いな表現のようで…。
「論語」ですよ！
え？
知っとる？
失礼しました。
孔子によれば，老人は蹉跌してはいけないのですね。
どうでもいいことでした。(^_^;)

★

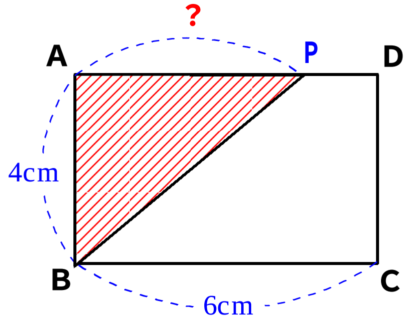
数学つづけましょ。
ところで，生徒Ｂも，点Ｐの速さを，１㎝／秒として計算しています。
やはり特殊的学習の被害者です。
しかし，生徒Ｂは点Ｐの速さを取り違えても正解しています。
数学では，
間違えて，間違えると正解することも起こるし，
途中の間違えが消えてしまうことも起こります。
不思議な世界です。
だから，途中の考え方は，先生や生徒のだれもがチェックできる形で
しっかりと記録させなくてはなりません。

閑話休題…
このフレーズ，新聞っぽい臭いがします。
大好きです。
「それはさておき」と読みます。
もちろん，うそですよ。
そういう意味です。
読み方は，「カンワキュウダイ」。
活字にすると，なんでも本当っぽく見えます。
怖いことです。
やはり，この問題では，ＣＤ間は生徒Ｃの考え方でいきましょ。
底辺×高さ÷２，こちらが「一般」です。

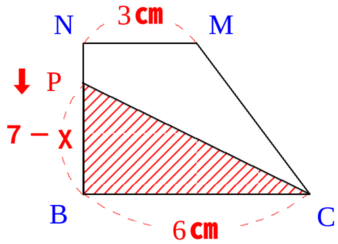
★

先生：「さて，いよいよ第４コーナーを回ってゴールを目指します！」
話が旅から，突然競馬に変わっていますナ。
でも，ここは競馬の第４コーナーでないと，どうも勢いがつかないようで…

先生：「点Ｐは辺ＡＤ上にいます。
　　　△ＡＢＰの面積ｙをχの式で表してみましょう。」
生徒Ｂ：「はい！
　　　　行きます。」
先生：「よ～し，イケ！」
ちゃ～と，勢いづいていますがね…
(*^_^*)！Yossha!



生徒Ｂ：「△ＡＢＰ＝台形ＰＡＢＣ－△ＰＢＣ
　　　　…ん？
　　　　ＡＰがわからないから使えない！
　　　　じゃ，他の手でいくか！
　　　　△ＡＢＰ＝四角形ＡＢＣＤ－台形ＰＢＣＤではどうだ！
　　　　ｙ＝４×６－（２χ－４－６＋６）×４÷２
　　　　ｙ＝２４－（２χ－４）×２
　　　　ｙ＝２４－４χ＋８
　　　　ｙ＝－４χ＋３２
　　　　よ～し，うまくいった！
　　　　Pachi，Pachi　だな！」
先生：「う～ん！
　　　いいんだけど，
　　　お勧めでない考え方だな！」
生徒Ｂ：「なして？」
先生：「たとえば，
　　　この考え方は，右のような場合には使えない。」



生徒Ｂ：「…うぐ」(-_-;)Shyunn!

★

生徒Ｂの考え方は，非常に論理的に組み立ててあり，
まちがいではないのですが…
生徒Ｂが生徒Ｃを批判したのと同じ論理で「一般性」がありません。
ひけない図形が出てきた所で，行き詰まります。
これを一人で考えたんだから
”ぱちぱち”で，「独創」といって，持ち上げてはいけません。
袋小路に入る考え方です。
袋の「ねずみ」になると出ることができなくなります。
「独創的な考え方ですね」とほめると「天狗」になります。
いろいろなものになって，自分を失います。
つまり，独創性をなくします。
不思議な循環ですが，
誤謬はどこかで自己矛盾をひきおこすことになっているものです。
「独創」をほめてあげたために伸びなくなった生徒を何人も見てきました。
中学生くらいの「独創」は，おおむね「我流」であるという認識は必要です。
本当の独創など，そうそう出てはたまらんです。

いい考え方は「たたきこむ」，
「たたき込まれうる」生徒だけが，将来創造性を発揮します。
「たたき込まれえない」生徒は…
はい，それまでです。

ぜったいに「たたきこまれない」生徒というのもおります。
分数のたし算を仮分数にしないと気が済まない生徒。
通分にたっぷり時間をかけ，しっかりとまちがえます。
こうした気質，わりと直りません。
たとえば，

$$\frac{5}{7}\times\left(4\frac{7}{13}+2\frac{18}{39}\right)$$
$$=\frac{5}{7}\times\left(\frac{59}{13}+\frac{96}{39}\right)$$
$$=\frac{5}{7}\times\left(\frac{177}{39}+\frac{96}{39}\right)$$
$$=\frac{5}{7}\times\left(\frac{177}{39}+\frac{96}{39}\right)$$
$$=\frac{5}{7}\times\frac{273}{39}$$
$$=\frac{273}{1365}$$

この約分で，たっぷり２０分をかけています。
３で割って，$\frac{91}{455}$ まではいくのですが，ここから先が行けません。
また，どういうわけか，この生徒，答の分母と分子を取り違えています。
通分，約分…
もう，疲れ果て，目がちらちら，
頭の中は，ぱっぱらぱ～！
集中力がなくなっています。

ちなみに，この計算は次のようにします。

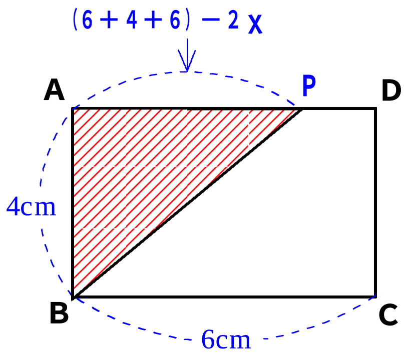
$$\frac{5}{7}\times\left(4\frac{7}{13}+2\frac{18}{39}\right)$$
$$=\frac{5}{7}\times\left(4\frac{7}{13}+2\frac{6}{13}\right)$$ ⇒ここから，暗算で　５　と出せます。
$$=\frac{5}{7}\times\left(6\frac{13}{13}\right)$$
$$=\frac{5}{7}\times 7$$
$$=5$$

この計算を示すと，さすがに感動しています。
その日はなっとくして，きちんとこの計算を覚えます。しかし…
１週間経つと，な～んもなかったように，全部仮分数にして通分を始めます。

この生徒，３週続けて同じまちがいをしています。
どうしよう…？
やはり，「はい，それまで…」なのでしょうか？
「すりこみ」は恐ろしいものです。(-_-;)！Hafu!

★

授業は，終盤へとさしかかります。
生徒Ｂ：「じゃ，どうすればいいの？」
先生：「三角形だから，
三角形の面積をだせばいいの。」
生徒Ｂ：「底辺×高さ÷２？」
先生：「そう。
高さはわかるから，底辺の長さを
χを使って表せばいいわけ。」
生徒Ｂ：「なるへそ！」
先生：「へそ？」
生徒Ｂ：「いいの，いいの，
で，そのへそを…
でないでしょ！
…その底辺をχを用いて表す方法ですが…」
先生：「旅のお話で行きます。
旅の全行程は（６＋４＋６）cmです。
今まで旅してきた距離は２χcmです。
残りの道のりは（１６－２χ）です。
この「残りの道のり」が
△ＡＢＰの底辺になります。
だから，
ｙ＝（１６－２χ）×４÷２＝－４χ＋３２
すなわち，ｙ＝－４χ＋３２となります。」



生徒達：「…」(*_*)？Muhu!
生徒達，すごいのか，すごくないのか判断できないでいます。
拍手がありませんね。
先生：「いいですか，
この残りの道のりをχを使って表すことが，動点問題のカーネルです。
しっかりと理解しましょう。」
生徒Ａ：「…ん？
どして，突然，こんなとこで自動車が寝るの？」
先生：「えっ…？」
生徒Ａ：「ｃａｒ，寝る！」
わけわかは，
ほっておきましょ。
神の声：「”わけわか”って，なに？」

もひとりのわけわかも，ほっておきましょ。

先生：「いいですか，
　　　もう一度言います。
　　　動点問題では，第４コーナーをまわったら，
　　　三角形の底辺をχを使って表し，
　　　…χは，「残りの道のり」ですが…
　　　三角形の面積は，公式を使ってχで表すのですよ。」
生徒達：「は～い！」
先生：「…
　　　わかってんのかね！」(-_-;)Muju!
生徒達：「よ～くわかりましたあ，でした。」
先生：「そういうことにしておきましょ。
　　　はい，それでは，きょうの授業はここまで！」

★

重要なので解説を入れます。
つまりですね，
三角形は「底辺×高さ÷２」であるから，これを一貫して通すこと。
これが一般になります。
（底辺や高さを求めることができないときだけ，特殊になります。
その場合には，生徒Ｂのような解法をとります。
つまり，公式の使える図形から公式の使える図形をひきます。
これはこれで，重要な考え方です。
特殊だからダメというのではありません。
あるタイプの解法での思考順序の問題を言っているのです。）
だから，一般的解法では，思考は
最初に，△ＡＢＰの底辺をχを用いて表すことに向かいます。
三角形をひくとか，台形がどうのこうのなど
よけいなことは考えないことです。

生徒Ｂ：「△ＡＢＰ＝台形ＰＡＢＣ－△ＰＢＣ
　　　　…ん？
　　　　ＡＰがわからないから使えない！」
というセリフがありますが，
この段階では，ＡＰの求め方を知らないからやむをえません。
しかし，たとえ，ＡＰの求め方を知っていたとしても
「面積－面積」を使っているので一般的とはいえません。

やはり，三角形の面積を求めるときは，なにはともあれ，
一直線に三角形の面積を求める公式へ向かうのが原則です。
原則とは，最初に考えるべきことです。

原則は思考を方向付けます。
だから，原則から考え始めるという習慣をつけると，思考力がつきます。
中位から少し上の生徒ですと，解法はそれなりに理解しているのですが，
問題を与えられたらどんな方針で解いていくのか，つまり解法の糸口を見つける
ことに困難を感じている生徒が多数おります。
こうした生徒に解法の糸口を，あるいは切り口を与えるのが原則であり，解法の
一般です。（これはこれでいつか詳細に検討しますが）
一般を身につけさせれば，
ほとんどの生徒はそのタイプの問題を難なく解くことができるようになります。
学力格差をなくすることができる，ということです。

★

この場合の三角形の底辺は，旅の行程からアナロジーします。
なぜ（１６－２χ）と表現できるのかという理由がきちんと理解できないと，
応用がきかなくなってしまいます。
旅のイメージは生徒に具体的で，確かな理解を与えます。

★

そして，授業は，ロスタイムへ！
生徒Ａ：「センセ，グラフは？」
先生：「そうそう，
　　　一番大切なグラフのかき方がまだでした！
　　　…が，もう９ページも使ったんで，この次にしましょ。」
生徒Ａ:「９ページって，だれに言ってんの？」
先生：「読者のみなさん」
生徒Ａ：「読者ってだれ？」
先生：「…」
教室に読者はいません！(*^_^*)
ジャンジャン！

★

区間関数のグラフも，また異次元の世界です。
今までは，１次関数では傾きがどうのとか，ｙ切片が違うとか…
どなりまくってきましたが…
今度はそいうのはさらっと西の海へ流しなさいと指導しなければなりません。
生徒にとっては，一種のカルチャーショックです。
生徒は不思議な顔をします。
１次関数なのに，傾きだの切片はもう考えちゃいけんというのですから…。
区間関数で，傾きや切片にこだわると袋小路に入ります。
ここでは，「グラフのかき方を考えましょう」…
などと「独創」を求めては，絶対いかんのです。
そんなことすると，生徒は一生懸命に傾きとｙ切片を探し始めます。
とてつもない時間をかけ，しっかりとまちがえます。
それですめばいいのですが，それが悪習として定着します。

「独創」の勧奨が，生徒を「うぬぼれ」と「青春の蹉跌」へと導きます。
しっかりと，先生が教えこまなければなりません。
次回は，区間関数のグラフのかき方をしっかりとたたきこむ指導法を考えます。

★

ところで，この１題，なかなか終わりませんナ！
いくらでもふくらんできます。(*^_^*)！
いくらでも書けるということは，内容の深い問題なんですね。
生徒のひとつひとつの答案をよ～く吟味しつつ，
ふか～く考えながら指導しなければならない教材である，ということです。

きょうも，あちこち道草をしてしまったんで…
とっぷりと，日が暮れてしまいました。(*^_^*)
カラスも「アホ～！」，「アホ～！」と鳴きながら西の空へ飛んでいきます。
ここは，笑ってはいけないところです！
ハシブトガラスの中に，
澄んだ声で，「アホ～！」と鳴くのが本当にいるのです。
笑うと，ハシブトガラスに失礼になります。
きっと，好きで「アホ～」と鳴いているのではないと思いますよ。(*^_^*)

★

きょうの教材は，動点問題③の紹介です。
三角形の高さを，方程式で求める必要のある問題です。
これは，今後立体（三平方の定理）などへ応用されうる役に立つ考え方です。
ぜひ，生徒に身につけさせたい技術のひとつです。

生徒さんに学習させてみてください。
だれも「動点と面積の問題」がよ～くわかるようになります。

■◀●■【　まちがいをさせない教材　】■●▶
インターネットを使った通信教育用教材（生徒の自学自習用教材）の紹介です

１次関数 №２５	３　１次関数の利用(1)　図形と１次関数 ■　動点と面積の問題（区間関数）②　■	クリック

《最初のページ》へ