連立方程式

「鉄橋の問題（動点の処理）」の指導

▶平成20年6月17日(火)

一定の速さで走っている列車があり，この列車が２５０mの鉄橋を渡りはじめてから渡り終るまでに２５秒かかり，１０７０mのトンネルを通過するとき，まったくかくれていたのは３５秒間であったという。
この列車の速さを毎秒χm，列車の長さをymとして，χ，yの値を求めなさい。

「鉄橋，トンネル，χ，y…求めなさい」
こういう文字を見るだけで，とどきどきし，頭の中が真っ白になる生徒がけっこういます。
「速さ」という文字を見るだけで拒否反応を示す生徒すらいます。(*^_^*)
小学校から苦しめられてきた単元です。
よ～く，わかりますが…。

「は・じ・き」などというものをふりまわして「解決」しようとするから
ますます分からなくなるのですよ…！

きょうは，分からない生徒もたまげて，思わず分かるようになること必定の
連立方程式・文章題「鉄橋の問題」の問題の指導法と教材を紹介してみました。

■　■　■

動点問題の典型は１次関数や２次関数の「動点と面積」の問題ですが…
方程式にも動点問題に似た問題があります。
鉄橋，あるいはトンネルの問題です。

似ているというのは解法の類似点をいいます。
関数の動点問題は，条件にあう変域で点を止めます。
そこで，あたかも固定した図形のようにして面積や体積をχを使って表現する，ということに解法の鍵があります。

動点問題としての鉄橋の問題（方程式）の特殊性は
鉄橋と列車との位置関係により，列車の走行距離が変わる，ということにあります。それに応じて，たし算であったりひき算であったり，あるいはなにもしなかったりします。

鉄橋の問題は，鉄橋と列車との位置関係により，次のような３種類の問題に分類できまる。
(1) 列車が鉄橋に入り始めてから，渡りきるまでの問題
(2) 列車が鉄橋の上にいるときだけの問題。

(3) 列車が鉄橋を渡り始めてから鉄橋をでる瞬間までの問題

それぞれの問題では，列車の移動する距離の計算方法が異なります。

列車の長さ（線分）に目が張り付いている間は，これらの列車の走行距離は見えてきません。

列車の長さ（線分）が２次元の量だから，その軌跡を追うことがきわめて困難であることが原因です。
そこで，列車の走行を１次元の量である点に還元して認識したらどうかという発想が生まれます。

線や面など２次元の量は，１次元の量の比べて認識しにくいことは明かです。
だから，２次元の量を１次元の量に還元して考えると，数学が苦手な生徒でも容易に理解できます。

つまり，「列車の先頭の１点に注目せよ」ということです。
例えば，(1) の条件下では，
列車が鉄橋に入り始めてから，渡りきるまで，列車の先頭の点がどこからどこまで動くかを押さえることです。
これは列車という線（２次元量）ではなく，点（１次元量）の軌跡を追っていることを意味します。

この技法は，平面図形における線の軌跡の面積を求める問題では，すごい威力を発揮しますが，それはまた後に論ずることになると思います…
（すごい威力というのは，分からない生徒もたまげて分かるようになるということです。）

どの単元の軌跡の問題にしても，面や線の軌跡を直感で理解することができるのは，ほんの一部の生徒にすぎず，大多数の生徒には無理な話です。

そこで，指導する側としては，「動かしてみると～になるでしょ」などとたわけたことをいわないで，
面や線の移動を点の移動としてとらえなおして考える技術を授けてあげなければなりません。

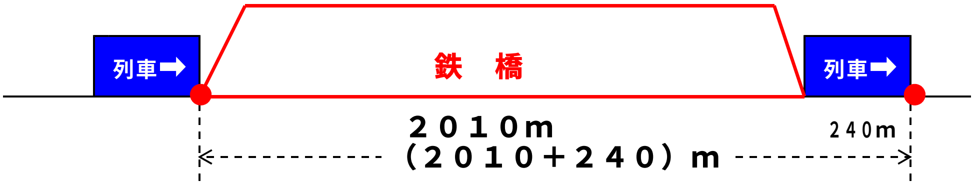
☆

このような指導のプロセスの一例をあげてみました。
鉄橋の問題です。（連立方程式の問題は別ファイルで後で紹介します）

【問題】

２４０mの長さの列車が，時速９０㎞で２０１０mの鉄橋を渡りはじめてから渡り終るまで何秒かかりますか。

【考え方】



動く問題では，面に注目すると全体の状況を把握できなくなります。
動く問題では，必ず１点に注目して，考えを進めます。
この問題では，列車の一番前の点に注目します。
時間を求める問題ですから，速さと距離がわかれば答を出せます。

［答　　案］

・速さは問題で与えられていて，９０㎞／時です。
単位をmにそろえます。９０㎞／時＝９０×１０００m／時
＝９００００m／時　…①

・さて，列車が動く距離ですが，
⇒ここが鉄橋の問題を解くときの鍵になる部分です。
列車が鉄橋を渡りきるためには，赤い点は ***「鉄橋の長さ＋列車の長さ」*** を動かなければなりません。
つまり，距離は（２０１０＋２４０）mということになります。…②

・①と②より，列車が鉄橋を渡りきる時間は，次の式で求めることができます。
（２０１０＋２４０）m÷９００００m／時＝０.０２５時
時の単位を秒になおします。
０.０２５時＝０.０２５×３６００秒＝９０秒

答　９０秒

☆

これは，列車が鉄橋を渡り始めてから渡り終わるまでの問題ですが，
次の２種類の問題では，さらに条件が複雑で，上の問題が解けたからといってさらっと解けるとは限りません。

。

(2) 列車が鉄橋の上にいるときだけの問題

走行距離が「鉄橋の長さ－列車の長さ」となる問題で，この列車の長さをひくという状況がつかめない生徒がかなりいます。
しかし，列車の先頭の１点に注目させ，その動きを追わせると納得できるようです。

(3) 列車が鉄橋を渡り始めてから鉄橋をでる瞬間までの問題

このタイプの問題では，走行距離は鉄橋の長さに等しいのですが，変に列車の長さがどうのこうのという使う必要のない攪乱条件が与えられるとおどおどする生徒が出ます。
等々。

鉄橋の長さに列車の長さをたすことも，ひくことも，無視することもあります。
こうした多用な状況設定が可能であることが生徒を混乱に陥れています。

だから，これらの攪乱的条件に左右されないで鉄橋の問題を解決できる考え方を生徒に与えてあげる必要があります。
線や面の動きは，点の動きとして追うという思考方法です。
（これもきわめて基礎的で応用範囲の広い一般的な思考技術です。基礎的ということは，数学的能力の重要な構成部分であるということを意味します。）

このようなことを考慮して，連立方程式の「鉄橋の問題」を解く学習プログラムを作成してみました。