

文字と式

文字式の商の表し方(その1)

▶平成20年5月29日(木)

文字を使った商の表し方を教えるとき、整数÷整数をどう扱うかによって教材の構成方法ががらっと変わってきます。

だから、最初にこの点を明確にしておかないと教材論が成立しません。

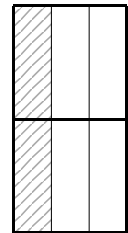
(1) 整数÷整数を整数のわり算として教える場合：

たとえば、

$a \div b = a / b$ とイメージさせて、 $a \div b = \frac{a}{b}$ と教えます。

なぜ÷bが分母にくるのかについては、次の説明で済みます。

すなわち、正方形の食パンを縦に2枚おき、3人で分けるために3等分します。1人分は $\frac{1}{3}$ が枚2つ分で $\frac{2}{3}$ 枚になります。



この話は、式では $2 \text{枚} \div 3 \text{人} = \frac{2}{3} \text{枚/人}$ となります。

わる数が分母にくることは、これで強烈にイメージさせることができます。

チョコレートを使って、結果を生徒に食べさせるとイメージは完全に生徒の頭の中で固定します。

(2) 整数を分数の特殊な形とみなし、整数÷整数を分数のわり算の特殊形として教える場合：

たとえば、

$$a \div b = \frac{a}{1} \div \frac{b}{1} = \frac{a}{1} \times \frac{1}{b} = \frac{a \times 1}{1 \times b} = \frac{a}{b}$$

と教えます。

教材構成論からいうと、

(1) の場合は、整数÷整数 分数÷分数の順で進み、2つの計算方法を学習することになります。

この中間に、分数÷整数、整数÷分数が入り、計算方法は混乱をきわめます。

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} \div c &= \frac{a}{b} \times c, & \frac{b}{a} \div c &= \frac{b c}{a} \\ a \div \frac{c}{b} &= \frac{1}{a} \times \frac{b}{c}, & a \div \frac{c}{b} &= \frac{c}{a b} \end{aligned}$$

など不思議な答案が頻発します。

(2) 整数を分数の特殊形とみなすと、分数の計算方法だけを学習することになり、計算法は整然とし、混乱は起こりません。ただ、計算に時間がかかりません。

それでも

$$a \div b = \frac{a}{1} \div \frac{b}{1} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{b} \text{ とする生徒は出ます。}$$

分数のわり算 = 「ひっくりかえす」という強力なイメージのせいなのでしょう。

$$\div \frac{b}{a} \text{ がなぜ } \times \frac{a}{b} \text{ となるかを教えるかどうかは諸論があります。}$$

そういうものとしてその操作に習熟させ、後でその理由を理解させるというのが実践レベルでの多くの先生方の解決策であるような気がします。

というのは、生徒に理由を教えても、ほとんどの生徒はその理由を理解しておらず、ただ「ひっくり返す」という現象を丸暗記するだけで、教えることが意味をもたないからです。

私も現場をあずかる立場からすればそうせざるを得ません。理由に時間をかけて教えたからといって、 $\frac{a}{1} \div \frac{b}{1} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$ とする生徒が絶対でないということはないからです。授業では生徒に「覚えてもらう」以外にはありません。

(2) の計算法が分かりやすいとはいっても、整数 ÷ 整数をすべて分数になおして計算するというのは現実的ではありませんし、実際のレベルではそんなことをしている人はいないのではないかと思います。

$$a \div b \text{ はただちに } \frac{a}{b} \text{ と処理しているはず。}$$

そこで、教材構成論としては、この理想と現実を1つにまとめあげ、リニアな（直線的な）流れとして教材を構成しなければなりません。

そうすると

(1) 整数 ÷ 整数は、ただちに分数で表す

(2) 分数をふくむ式では、すべてを分数の形に直してから、「わる」かわりに「逆数をかける」

という2段階の指導にするのが一番いいのではないかと思います。

* 具体的には、教材をどのように配列するは、サンプルをご覧ください。

文字と式 1 3	2 文字を使った式の表し方(その2) 商の表し方	クリック
-------------	------------------------------------	----------------------

文字と式 1 5	2 文字を使った式の表し方(その2) 商の表し方 - 分数を含む式(その1)	クリック
-------------	--	----------------------

文字式の商の表し方では、計算方法と教材構成法の問題とは別に、次のような問題があります。

・ 約分の処理の問題

$$\begin{aligned}\frac{1}{a b} \div \frac{a}{b} &= \frac{1}{a b} \times \frac{b}{a} \quad \dots \\ &= \frac{1 \times b}{a b \times a} \quad \dots\end{aligned}$$

つまり、 $\frac{1}{a b}$ の形で約分させるか、 $\frac{1}{a b}$ の式を書かせてここで約分させるか、という問題です。一見ささいな問題のようですが、式が複雑になるとここで間違える生徒が多発します。

・ $\div \frac{3}{2} a$ の形の a の処理の問題

a の行き場所がうろうろする生徒がいっぱい出ます。

・ $\frac{b}{a} \div (c + d) \div e$ など、() の処理の問題

分配法則を習うせいから、() をいつのまにか消してしまう生徒がけっこう出ます。また、もちろん乗数がなくなれば() も消えるわけですが、この辺の混乱がなかなか解決しないようです

等々、文字式の商の表し方をめぐるこれらの派生的な諸問題については、次回に考えてみたいと思います。